

Rammeformler for pæle i sand

Torben Sørensen og Bent Hansen

Tidsskrifter

BSM 27-2 Bygningsstatistiske Meddelelser

1956

RAMMEFORMLER FOR PÆLE I SAND

EN ANALYSE BASERET PÅ DIMENSIONS BETRAGTNINGER OG
EN STATISTISK UNDERSØGELSE

Af

TORBEN SØRENSEN OG BENT HANSEN
GEOTEKNISK INSTITUT

624.154/5

NOMENKLATUR

- L = Pælens længde.
 A = Pælens tværsnitsareal.
 D = Pælens diameter.
 E = Pælens elasticitetskoefficient.
 ρ = Pælens massefylde.
 $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ lyd hastigheden i pælen.
 g = Tyngdens acceleration.
 $\gamma_p = \rho g$ pælens rumvægt.
 $W_p = \rho g A L$ pælens vægt.
 W = Ramslagets vægt.
 H = Faldhøjden.
 α = Reduktionsfaktor på rammeenergien.
 Q = Jordens bæreevne.
 S = Pælens totale plastiske sætning.
 X = Afstand langs pælen under pæletoppen.
 Z = Nedadrettet bevægelse til et givet tidspunkt af et pæletværsnit.
 P = Kraften i et pæletværsnit.
 k = Ballasttal for jorden.
 k' = Ramhattens ballasttal.

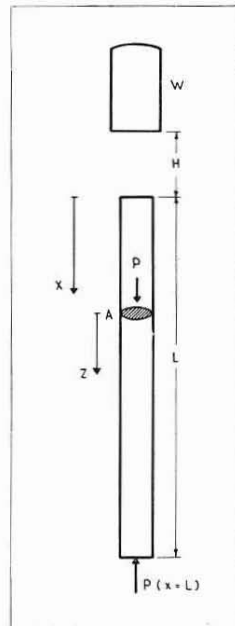


Fig. 1.

1. Indledning.

Bestemmelse af pæles bæreevne kan i princippet ske på tre forskellige måder, nemlig:

1. ved statisk beregning på basis af en eksperimentel bestemmelse af jordens forskydningsstyrke, c , og friktionsvinkel φ .
2. ved dynamisk beregning ved hjælp af en rammeformel.
3. ved prøvebelastning.

Praksis i dag er — eller burde være — den, at prøvebelastninger ved alle opgaver over en vis størrelse benyttes til kontrol af de ved de to førstnævnte metoder opnåede resultater.

Ved pæle i ler — fast moræneler dog undtaget — lægges hovedvægten på den statiske beregning, dels fordi den giver god nøjagtighed, dels fordi man nu ved hjælp af vingeboeret på nem og billig måde kan skaffe sig pålidelige oplysninger om jordens forskydningsstyrke.

Ved pæle i sand er den statiske beregning af flere grunde mindre anvendelig. For det første er det en ret kompliceret sag at bestemme sandets friktionsvinkel, hvad enten det forsøges in situ eller i laboratoriet. For det andet er bæreevnens afhængighed af friktionsvinklen meget stejl og endnu kun mangelfuldt belyst, således at man ikke selv med kendskab til friktionsvinklen kan forvente særlig god nøjagtighed. Endelig er den dynamiske metode særdeles simpel og nogenlunde pålidelig, når det drejer sig om sand, hvorfor rammeformlerne stadig vil finde udstrakt praktisk anvendelse i dette tilfælde.

Der er imidlertid i tidens løb fremsat et stort antal forskellige formler, der giver vidt forskellige resultater anvendt på samme pæl, og man må selv i den moderne litteratur lede forgæves efter en rationel behandling af og sammenligning mellem alle disse formler.

Nærværende artikel er resultatet af et forsøg på at skabe lidt orden i dette kaos. Dette er sket dels på basis af en dimensionsløs fremstilling af de vigtigste rammeformler og en sammenligning med 78 belastningsforsøg med tilhørende rammedata, dels på basis af en dimensionsløs svingningsteoretisk undersøgelse af selve rammeprocessen med en numerisk integration af de for denne gældende differentialligninger. De vigtigste resultater af dette arbejde er i korthed følgende:

1. Nøjagtigheden af de formler, der på rationel måde tager hensyn til pælens elastiske deformationer, er praktisk talt den samme.
2. Der er opstillet en ny formel, der er lige så nøjagtig som de bedste

af de hidtil kendte formler og væsentlig simple for anvendelse i praksis.

3. Der er påvist en tilfredsstillende overensstemmelse mellem de bedste af de undersøgte formler og den principielt mere korrekte svingningsteoretiske analyse.
4. Der er opstillet simple rationelle kriterier for den nødvendige vægt af ramslaget og den tilladelige faldhøjde.

2. Forudsætninger. Dimensionsbetragtninger.

Spændingsforholdene i en pæl under ramningen er så komplicerede, at en eksakt behandling er praktisk uigennemførlig, bl. a. fordi mange problemer i forbindelse hermed, som f. eks. betons og jords deformationer under hurtige spændingsvariationer med store amplituder, næppe nok kan behandles teoretisk endnu. Det er derfor nødvendigt selv i en teoretisk behandling af spørgsmålet at opstille forenklede forudsætninger; bortset fra hensynet til overhovedet at kunne analysere problemerne kan der i denne forbindelse henvises til, at den praktiske ramningsproces i reglen medfører så store usikkerhedsmomenter bl. a. ved bestemmelsen af den tilførte rammeenergi, at forøget nøjagtighed ved anvendelse af mere forfinede teorier ofte kan blive ret illusorisk.

Arbejdskurve for jorden

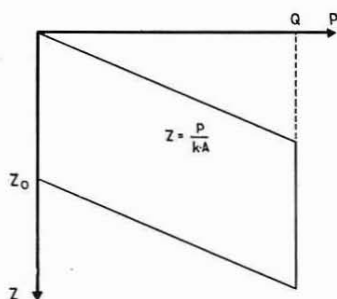


Fig. 2.

Der ses i det følgende bort fra pælens overflademodstand, hvilket er forsvarligt, da kun pæle i sand (altså spidsbærende pæle) betragtes. Det antages endvidere, at spidsmodstanden afhænger af pælespidens bevægelser som angivet på den på fig. 2 viste arbejdskurve, samt at pælematerialet og materialet i en eventuel rammeplade følger Hooke's

lov. Foruden de elastiske og plastiske kraftstørrelser, der er implicerede i de ovenfor nævnte forudsætninger, tages der hensyn til inertikræfterne på ramklodsens og i pælen. Derimod ses der bort fra energitab hidrørende fra f. eks. plastisk dæmpning i pælen og rammepuden samt hysteresese i rammepude, pæl og jord, ligesom der ses bort fra inertikræfterne i jorden, samt spændingerne hidrørende fra den statiske vægt af pæl og ramklods.

Idet ramslaget rammer pælen, udløses en spændingsbølge i pæletoppen hidrørende fra ramklodsens bremsning. Den bevæger sig ned gennem pælen, samtidig med at denne begynder den nedadrettede bevægelse. Ved delvis refleksion af spændingsbølgen fra pælespids og pæletop opstår der elastiske svingninger i pælen, samtidig med at den bevæger sig nedad med aftagende hastighed, idet den efterhånden bremses af spidsmodstanden. Når den nedadrettede bevægelse er standset, er der stadig svingninger i pæl og jord, da de ifølge de gjorte forudsætninger ikke dæmpes.

Rammeprocessen i den på fig. 1 viste pæl beskrives fuldstændigt, idet man angiver bevægelser Z (positivt nedadrettede) og trykkrafter P i ethvert pælesnit til ethvert tidspunkt.

$$\begin{aligned} P &= F(X, T) \\ Z &= G(X, T) \end{aligned} \tag{1}$$

Disse udtryk er naturligvis forskellige for forskellige pæle; det er imidlertid klart, at man ved betragtning af alle mulige pæle (d. v. s. alle mulige sæt af parametrene $L, A, E, \varrho, W, H, k, k'$ og Q) kan finde grupper, hvor der så at sige sker det samme, blot i forskellig målestok. Dette vil være tilfældet, hvis alle kræfter og deformationer er ligedannede i ligedan beliggende pæletværsnit til ligedan beliggende tidspunkter (det kan f. eks. tænkes, at alle processer forløber dobbelt så hurtigt i en model som i prototypen; i modellen skal man da betragte halvt så store tidsintervaller som i prototypen for at få overensstemmelse).

Det ses umiddelbart, at pæletværsnittenes beliggenhed, d. v. s. afstande målt langs pælens akse, kan gives længdeenheden L , altså f. eks. $X = x \cdot L$; ligedan beliggende punkter har da samme x -værdi for alle pæle.

Mens de rent geometriske forhold i pælen er bestemt af længdemålestokken L , vil deformationerne i forskellige — ikke nødvendigvis geometrisk ligedannede — pæle desuden være afhængige af pælematerialets elastiske egenskaber m. v., således at deformationerne ikke kan

måles med L som enhed. I stedet må vi indføre på forhånd ubekendte deformations-, kraft- og tidsmålestokke og lade disse bestemmes af formen af de bestemmende kræfter. Alle deformationer Z , alle kræfter P og alle tider T udtrykkes altså på formen:

$$\begin{aligned} Z &= zS_0, \\ P &= pQ_0 \\ \text{og } T &= tT_0, \end{aligned}$$

hvor indeks 0 angiver, at der er tale om en for pælen karakteristisk størrelse (målestokken), mens de små bogstaver betegner dimensionsløse proportionalitetsfaktorer, der er ens for dynamisk lignedannede pæle.

Dynamisk lignedannethed mellem to pæle er således ensbetydende med, at der til ethvert værdisæt af de uafhængige variable (x, t) svarer samme værdisæt af de afhængige variable (z, p) i de to pæle.

Det ses let, at dynamisk lignedannethed medfører, at forholdet mellem to vilkårlige kraftstørrelser i samme pæl er ens for lignedannede pæle, når der betragtes ligan beliggende tværsnit og tidspunkter i de forskellige pæle. Denne relation benyttes i det nedenstående til opstilling af hensigtsmæssige udtryk for S_0 , Q_0 og T_0 .

A. ELASTISKE KRÆFTER I PÆLEN

Da bevægelsen af et pæletværsnit kan skrives som zS_0 , er den specifikke sammentrykning af en strækning af pælen proportional med $\frac{S_0}{L}$; trykkræfterne i pælen er altså proportionale med $AE \frac{S_0}{L}$, og dette gælder også differensen mellem trykkræfterne i to nærtliggende pæletværsnit d. v. s. den elastiske kraft på det mellemliggende legeme. For lignedannede pæle er proportionalitetsfaktoren til denne størrelse den samme, og størrelsen er derfor et udtryk for Q_0 udtrykt ved de for elastiske kræfter karakteristiske størrelser.

$$Q_0 = AE \frac{S_0}{L}. \quad (2)$$

B. INERTIKRÆFTER I PÆLEN

Betragtes samme legeme som under A, ses det, at dets acceleration er proportional med $\frac{S_0}{T_0^2}$.

Dets masse er proportional med ρAL , således at inertikraften på legemet bliver proportional med

$$Q_0 = \varrho AL \frac{S_0}{T_0^2}. \quad (3)$$

Q_0 bestemt på de to måder skal naturligvis være den samme, hvoraf følger, at

$$T_0 = \frac{L}{\sqrt{\frac{E}{\varrho}}} = \frac{L}{a}, \quad (4)$$

hvor a er lydhastigheden i pælen. Dette resultat kan også udledes direkte, da tidsmålestokkene for to forskellige pæle øjensynligt må stå i et sådant forhold til hinanden, at første spændingsbølge når ned til foden af pælen for samme værdi af t .

C. INERTIKRÆFTER PÅ RAMKLODSEN

Ramklodsens faldenergi er αWH ; en vis del af denne energi omsættes til elastisk energi i pælen, idet ramklodsens, der påvirkes af en kraft proportional med Q_0 , bevæger sig et stykke proportionalt med S_0 . Faldenergien kan altså sættes proportional med $\frac{1}{2} Q_0 S_0$ (multipliseret med integralet af en dimensionsløs funktion). Proportionalitetsfaktoren vælges lig med 1 for alle pæle, hvorefter Q_0 og S_0 er entydigt definerede:

$$Q_0 S_0 = 2 \alpha WH. \quad (5)$$

Ved sammenligning med (2) fås heraf:

$$Q_0 = \sqrt{2 \alpha WH \frac{AE}{L}} \quad (6)$$

og

$$S_0 = \sqrt{2 \alpha WH \frac{L}{AE}}. \quad (7)$$

Mens ramklodsens afgiver sin faldenergi til pælen, er dens acceleration proportional med $\frac{S_0}{T_0^2}$; dens masse er $\frac{W}{g}$, således at inertikraften er proportional med $\frac{W}{g} \frac{S_0}{T_0^2}$. For lignedannede pæle skal denne størrelse

divideret med Q_0 være det samme, altså $\frac{WS_0}{gT_0^2Q_0} = \frac{W}{\rho gAL} = \frac{W}{W_p} =$ konstant. En nødvendig betingelse for at to pæle er ligedannede er derfor, at

$$w = \frac{W_p}{W} \quad (8)$$

er den samme.

D. JORDENS BÆREEVNE

Denne størrelse er betegnet med Q . Dynamisk ligedannethed kræver, at

$$q = \frac{Q}{Q_0} \quad (9)$$

er den samme.

E. ELASTISK KRAFT FRA JORDEN

Ifølge definitionen af ballasttallet k (jfr. fig. 2) er den elastiske kraft fra jorden proportional med kAS_0 . Analogt med det ovenfor angivne fås, at

$$\frac{kAS_0}{Q_0} = k \frac{L}{E} = n \quad (10)$$

skal være ens for ligedannede pæle.

F. ELASTISK KRAFT I RAMMEPUDEN

Denne størrelse er proportional med $k'AS_0$. Ligedannethedsbetingelsen kræver analogt, at

$$n' = k' \frac{L}{E} \quad (11)$$

er ens for de betragtede pæle.

En gruppe ligedannede pæle kan således karakteriseres ved parametersættet (q, w, n, n') , og ifølge det foregående er disse størrelser alene bestemmende for ramningsprocessens forløb. (1) kan derfor skrives:

$$p = F(x, t; q, w, n, n') \quad (12)$$

og

$$z = G(x, t; q, w, n, n'). \quad (13)$$

Den størrelse, der specielt har interesse under ramningen, er i denne forbindelse S = den totale plastiske nedsynkning af pælen. Den ville fremgå af (13), hvis funktionen G var kendt, for $x = 1$ og en eller anden fast værdi af t , afhængig af de øvrige parametre. Man kan derfor skrive:

$$s = \frac{S}{S_0} = f(q, w, n, n'). \quad (14)$$

Denne funktionssammenhæng, hvor q nu kan opfattes som uafhængig variabel, idet variationen fra pæl til pæl betragtes, angiver det analytiske udtryk for de såkaldte rammeformelkurver. Ved deres hjælp kan bæreevnen for en given pæl bestemmes, når den blivende (plastiske) deformation pr. slag er kendt. Det skal senere vises, hvorledes man ud fra et givet parametersæt w, n, n' ved numerisk integration kan bestemme den tilsvarende rammeformelkurve, men forinden skal betragtes nogle af de allerede kendte tilnærmelser til (14), rammeformlerne, der er karakteriseret ved, at de ved enkle energibetragtninger opnår relativt simple analytiske udtryk for (14).

Af de betragtede fire parametre afhænger de to — q og n — af jordens egenskaber, mens man til en vis grad selv er herre over de to andre; det kan derfor være af interesse nøjere at undersøge de variationer, man kan forvente i q og n .

q er defineret som $\frac{Q}{Q_0}$, hvor Q er sandets bæreevne, som i analogi med Terzaghi's formel antages at være givet ved:

$$Q = A(0,3 \gamma D + \beta \gamma d) N = A p_0 \beta N. \quad (15)$$

N er her en dimensionsløs konstant, og det er antaget, at dybdefaktoren β er kendt. γ er jordens rumvægt og d er pælens nedrammede dybde (der er implicit forudsat homogen jord). I p_0 er leddet γd normalt af overvejende betydning, således at man har:

$$q = \frac{A \gamma d \beta N}{\sqrt{2 \alpha W H \frac{A E}{L}}} \sim \frac{\gamma D d}{\sqrt{W H \frac{E}{L}}} \beta N, \quad (16)$$

idet $A \sim D^2$. βN afhænger af sandets egenskaber og desuden af forholdet d/D . Rammes en pæl ned i jorden, vil q således vokse propor-

tionalt med den nedrammede dybde (forudsat homogen jord). Det skal dog bemærkes, at den størrelse, der får indflydelse under ramningen, er den dynamiske bæreevne Q_{dyn} — altså bæreevnen ved meget kortvarige belastninger — mens den størrelse, der måles under det eventuelt påfølgende belastningsforsøg, og som i hvert fald spiller en afgørende rolle for pælens anvendelighed, er den statiske bæreevne Q_{st} — gældende for langtidsbelastninger. Der er ingen grund til at antage, at disse størrelser er identiske; sandsynligvis er den førstnævnte mindst, og forholdet $m = \frac{Q_{st}}{Q_{dyn}}$ kommer således til at indgå i formlerne (12)–(14) som parameter (idet man ved en eksperimentel afprøvelse af dem kun kan indsætte q som $\frac{Q_{st}}{Q_0}$). Om størrelsen m vides iøvrigt så godt som intet på indeværende tidspunkt, hvorfor der er set bort fra den, idet det er indlysende, at den må have en vis, ukontrollabel indflydelse.

Parameteren n , der har relation til jordens elastiske deformationer, kan vurderes ud fra følgende betragtninger:

For jordens deformationer kan antages at gælde modelloven:

$$\frac{\delta}{D} = \left(\frac{p_0}{K}\right)^{2/3} f\left(\frac{p_s}{p_0}\right) + g\left(\frac{p_s}{p_0}\right). \quad (17)$$

p_s er belastningen pr. arealenhed af pælspidsen $\left(= \frac{P}{A}\right)$, og p_0 er defineret som i ligning (15), mens K , der er en materialkonstant, har dimension som en elasticitetskoefficient. δ , der er den hyppigst benyttede betegnelse f. eks. ved fundamenter, er lig med Z for $X = L$. De to funktioner f og g er ukendte. Første led i udtrykket betegner de elastisk-plastiske deformationer i forbindelse med sandskornenes elastiske sammentrykninger, mens andet led repræsenterer rent plastiske deformationer (der formentlig for en prøvebelastning har overvejende betydning). Deformationerne svarende til første led er formentlig delvis reversible, mens andet led angiver blivende deformationer.

Under pæleramningen belastes jorden under pælspidsen op til brud ved hvert ramslag. Efter nogen tids ramning er der derfor formentlig udelukkende tale om næsten rent elastiske genbelastninger, hvorfor der kan ses bort fra det andet led i (17). Første led synes i dette til-

fælde ifølge belastningsforsøg på plader foretaget ved Geoteknisk Institut at kunne skrives:

$$\frac{\delta}{D} = c \cdot \left(\frac{p_0}{K}\right)^{2/3} \left(\frac{p_s}{p_0}\right)^{2/3} = c \cdot \left(\frac{p_s}{K}\right)^{2/3}, \quad (18)$$

hvor c er en konstant. Som angivet på fig. 2 er jordens arbejdskurve tilnærmet med en ret linie, mens den ifølge (18) snarere er en $2/3$ -grads parabel. Den rette linie indlægges nu således, at man får den korrekte værdi af den totale opsummerede elastiske energi for $P = P_{br} = Q$. Dette er åbenbart ensbetydende med at antage et konstant forhold mellem δ_{br} bestemt ved den rette linie og ved (18):

$$\delta_{br} = \frac{Q}{kA} \sim \left(\frac{Q}{KA}\right)^{2/3} \cdot D \quad (19)$$

For at dette kan være opfyldt skal:

$$k \sim \frac{(\gamma d)^{1/3} K^{2/3}}{D}, \quad (20)$$

idet Q som ovenfor sættes proportional med $A\gamma d$. For n fås tilsvarende:

$$n = k \frac{L}{E} \sim K^{2/3} \frac{(\gamma d)^{1/3} L}{DE}. \quad (21)$$

Det ses, at n for samme pæl kun vokser proportionalt med kubikroden af den nedrammede dybde, således at den ikke er særlig følsom for variationer i denne størrelse; derimod varierer den omvendt proportionalt med pælens diameter. Dette gælder også k , som altså er langt fra at være en konstant for alle pæle selv i samme jord.

Ved denne parameter møder man iøvrigt den samme vanskelighed som ved q , idet det er meget vanskeligt eksperimentelt at bestemme sandets arbejdskurve for hurtige belastninger. Forholdet træder blot ikke så tydeligt frem her, da man normalt ikke bestemmer sandets arbejdskurve for en given pæl til indsættelse af det fundne n i rammeformlen; desuden er betydningen af n i det hele taget forholdsvis ringe.

3. Opstilling af rammeformler.

Alle eksisterende rammeformler bygger på en energibetragtning, idet de med forskellige tilnærmelser udtrykker, at den energi, der i eet slag tilføres pælen, forbruges til elastiske og plastiske deformationer af pæl og jord.

Energiregnskabet opstilles for det tidspunkt, hvor pælespidsen befinder sig i sin dybeste stilling, d. v. s. når jordens plastiske deformation er på nippet til at høre op. På dette tidspunkt vil den tilførte energi være til stede som elastisk energi E_{el} , kinetisk energi E_{kin} og varme i pælen, jorden og ramslaget. Varmeenergien er igen dannet dels ved hysteres, dels ved plastiske deformationer i de tre legemer. Idet vi tager hensyn til energitabet i rambukken ved indførelse af koefficienten α , og idet vi yderligere sammenfatter hysterese- og energitabet fra ramslagets og pælens plastiske deformationer under betegnelsen »stødtabet« E_{st} , kan energiligningen skrives:

$$\alpha WH = E_{el} + E_{kin} + E_{st} + E_{pl}. \quad (22)$$

Med undtagelse af E_{pl} , den til jordens plastiske deformation forbrugte energi, betegnes alle leddene på højre side i denne sammenhæng som »energitab«.

De hidtil for praktisk anvendelse opstillede rammeformler bygger alle på den forudsætning, at spændingerne forplanter sig momentant i pæl, jord og ramslag, eller at lyd hastigheden er uendelig stor:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \infty. \quad (23)$$

Denne forudsætning kan også udtrykkes ved, at pæl og jord betragtes som vægtløse og ramslaget som uendelig stift.

Ligning (23) medfører åbenbart, at den kinetiske energi falder bort på højre side i energiligningen, og at den i ramslaget opsamlede elastiske energi sættes til nul.

De fleste rammeformler forudsætter endelig, at friktionen langs pælens sider er lille i forhold til spidsmodstanden, således at (23) yderligere medfører, at alle pælens tværsnit er påvirket af samme kraft Q .

I det følgende behandles nogle få af de mest kendte rammeformler, udvalgt således, at de i rimeligt omfang repræsenterer de væsentligt

forskellige træk ved alle kendte formler. De fleste formler adskiller sig nemlig blot ved at foreskrive forskellige værdier for sikkerhedsgrader eller empiriske korrektionsfaktorer.

Den simpleste af alle rammeformler negligerer samtlige energitab

$$\alpha WH = QS. \quad (24)$$

(SANDERS, 1820)

Formlen har kun historisk interesse og nævnes blot for fuldstændighedens skyld.

EYTELWEIN (ca. 1850) udtrykte energitabene ved hjælp af Newtons stødteori for to *frit bevægelige* legemer, idet han satte den såkaldte restitutionskoefficient, e , til nul, svarende til et fuldstændig plastisk stød, hvorved findes

$$\alpha WH = \alpha WH \cdot \frac{W_p}{W + W_p} + QS$$

eller

$$\alpha WH \cdot \frac{W}{W + W_p} = QS. \quad (25)$$

Det største fremskridt i rammeformlernes historie blev gjort, da WEISBACH omkring 1850 indførte det elastiske energitab i pælen:

$$\alpha WH = \frac{1}{2} Q^2 \frac{L}{AE} + QS. \quad (26)$$

Nordmanden JANBU [3] forbedrede 100 år senere denne formel ved indførelse af en empirisk bestemt korrektionsfaktor $n_w = f(w)$:

$$\frac{1}{n_w} \cdot \alpha WH = \frac{1}{2} Q^2 \frac{L}{AE} + QS. \quad (27)$$

Ved indførelsen af denne korrektionsfaktor kan det opnås, at de ved rammeformlen beregnede bæreevner bringes til at ligge midt i spredningsintervallet for de ved belastningsforsøg bestemte statiske bæreevner. Ved at udtrykke n_w som en funktion af w har man forsøgt at tage hensyn til stødtabet. JANBUS oprindelige udtryk for n_w er:

$$n_w = 1,50 + 0,30 \cdot w. \quad (28)$$

Civilingeniør KNUD MORTENSEN [4] har på basis af et noget større antal forsøg foreslået

$$n_w = 0,8 + 0,4 \cdot w. \quad (29)$$

Den mest fuldstændige formel, der i større omfang har været anvendt i praksis, er antagelig Hiley's formel, der tager hensyn til stødtabet og til de elastiske energitab i pæl, jord og rammepeude. Stødtabet beregnes efter Newton's stødteori, og de elastiske deformationer af jorden og rammepeuden beregnes ved indførelse af ballasttallene k og k' :

$$\alpha_{WH} = \alpha_{WH} \cdot \frac{W_p(1-e^2)}{W+W_p} + \frac{1}{2} \frac{Q^2 L}{AE} + \frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{Q^2}{A} + \frac{1}{2} \frac{1}{k'} \frac{Q^2}{A} + QS$$

$$\alpha_{WH} \cdot \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 L}{AE} \left[1 + \frac{E}{L} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \right] + QS \quad (30)$$

eller

$$\eta \alpha_{WH} = \zeta \frac{1}{2} Q^2 \frac{L}{AE} + QS \quad (31)$$

hvor

$$\eta = \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (32)$$

$$\zeta = 1 + \frac{E}{L} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}. \quad (33)$$

For normale rammebetingelser vil man iflg. CHELLIS [2] og ALLIN [1] kunne sætte $e = 0,4$.

HILEY anbefaler egentlig, at den elastiske deformation af pælen og jorden måles ved et simpelt arrangement under selve ramningen. Der er imidlertid ikke offentliggjort nogen dokumentation for, at man her ved opnår nogen forbedring af nøjagtigheden, og der er heller ikke nogle af de publicerede forsøg, der indeholder sådanne målinger, hvorfor man ved undersøgelsen af formelen er henvist til at benytte de værdier for k og k' , der angives i litteraturen.

Disse er:

	$k = 2,8 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^3$
Træpæle	$k' = 2,8 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^3$
Jernbetonpæle	$1,1 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^3 \leq k' \leq 5,5 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^3$

Variationen i k' for jernbetonpæle svarer til forskellige konstruktioner af ramhatten. Desværre indeholder de benyttede forsøg ingen oplysninger om dette punkt, og vi er derfor også her henvist til at benytte en middelværdi, der er sat til

$$k' = 2,8 \cdot 10^2 \text{ kg/cm}^3.$$

(31) adskiller sig iøvrigt kun fra Hiley's oprindelige formel derved, at man ved beregningen af pælens elastiske sammentrykning har antaget, at hele rammemodstanden er en spidsmodstand; forskellen er uden betydning.

Engineering News' formel

$$WH = QS + \frac{1}{2} Qc, \quad (34)$$

hvor de elastiske deformationer af pæl, jord og evt. rammepude tilnærmes ved den empirisk fastlagte konstant c , der f. eks. for ramning med damphammer sættes til 0,2" og for ramning med faldhammer til 2", har vundet ret stor udbredelse i udlandet. Trods sin simpelhed kan formlen ved passende valg af konstanten c give udmærket nøjagtighed, og det vil derfor være af interesse at inddrage den i denne undersøgelse. Formlen egner sig imidlertid ikke i den opskrevne form til dimensionsløs fremstilling, hvorfor vi vil give den en noget modificeret og samtidig væsentlig forbedret form.

Det er indlysende, at de elastiske energitab overhovedet kun spiller en væsentlig rolle ved ret hård ramning, d. v. s. når S er lille. Ydermere er jordens elastiske deformation antagelig i almindelighed lille i forhold til pælens elastiske sammentrykning. Det vil derfor være rimeligt i stedet for c i (34) at sætte pælens elastiske deformation, når $S = 0$, og der ikke tages hensyn til andre elastiske energitab. Denne størrelse, S_0 , kan findes af Weisbachs formel (26):

$$S_0 = \sqrt{\frac{2 \alpha WHL}{AE}}. \quad (35)$$

Den er i øvrigt identisk med den ved dimensionsbetragtninger opstillede længdeenhed for bevægelser (7).

Vi vil altså undersøge formlen

$$\alpha WH = QS + \frac{1}{2} QS_0, \tag{36}$$

som vi vil benævne S_0 -formlen.

Ved anvendelse i praksis løses formlerne med hensyn til Q . Alle formlerne exclusive S_0 -formlen kan skrives på formen:

$$Q = \frac{\eta \cdot 2 \alpha WH}{S + \sqrt{S^2 + \eta \zeta 2 \alpha WH \frac{L}{AE}}}, \tag{37}$$

hvor formlerne kun adskiller sig ved vurderingen af parametrene η og ζ . For formler, der intet hensyn tager til pælens elastiske deformationer, er åbenbart $\zeta = 0$, mens formler, der ser bort fra det mere udefinerlige stødtab, sætter $\eta = 1$.

Man har nu for de forskellige formler:

Rammeformel	η	ζ
Sanders	1	0
Eytelwein	$\frac{1}{1+w}$	0
Weisbach	1	1
Janbu	$\frac{1}{n_w} \begin{cases} \frac{1}{1,5 + 0,3 w} \\ \frac{1}{0,8 + 0,4 w} \end{cases}$	1
Hiley	$\frac{1 + e^2 w}{1 + w}$	$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$

S_0 -formlen, der lyder

$$Q = \frac{\alpha WH}{S + \frac{1}{2} \sqrt{2 \alpha WH \frac{L}{AE}}}, \tag{38}$$

kan øjensynligt ikke indpasses i dette skema. Den har den rent praktiske fordel frem for de bedste af de andre rammeformler (d. v. s. dem som sætter $\zeta \neq 0$), at størrelsen inde under kvadratrodstegnet er kendt på forhånd for en given pæl og i almindelighed vil være fælles for et stort antal pæle ved en given opgave, således at det beregningsarbejde, der kræves f. eks. på en byggeplads, er det enklest mulige.

4. Dimensionsløs fremstilling.

Alle de omtalte rammeformler kan bringes på formen (14), d. v. s. fremstilles dimensionsløst, ved division med

$$Q_0 S_0 = 2 \alpha WH.$$

Man finder derved følgende udtryk:

$$\text{Sanders' formel} \quad q = \frac{1}{2s}$$

$$\text{Eytelweins formel} \quad q = \frac{1}{1+w} \cdot \frac{1}{2s}$$

$$\text{Weisbachs formel} \quad q = \sqrt{1+s^2} - s$$

$$\text{Janbus formel} \quad q = \sqrt{\frac{1}{n_w} + s^2} - s$$

$$\text{Hileys formel} \quad q = \frac{1}{\zeta} \left[\sqrt{\eta\zeta + s^2} - s \right]$$

$$\text{S}_0\text{-formlen} \quad q = \frac{1}{2s+1}$$

Grafisk afbildning af disse formler sker mest praktisk ved brug af dobbeltlogaritmisk papir. I denne afbildning vil Sanders' formel fremstille en ret linie med hældningen -1 . Eytelweins formel vil fremstille en enkelt uendelighed af dermed parallelle rette linier bestemt ved parameteren w . Weisbachs formel fremstiller en kurve, der for $s \rightarrow \infty$ nærmer sig asymptotisk til Sanders' formel, svarende til, at næsten hele rammeenergien udnyttes til pælens plastiske nedpresning, mens den for $s \rightarrow 0$ har asymptoten $q = 1$, svarende til den maksimale kraft,

der regningsmæssigt kan optræde i pælen, når hele energien medgår til elastisk deformation af denne. Janbus og Hileys formler fremstiller henholdsvis en enkelt og en dobbelt uendelighed af kurver bestemt ved parametrene n_w og η og ζ . Disse kurver er alle af samme form som Weisbachs kurve, blot med andre asymptoter. Endelig fremstiller S_0 -formlen en kurve, der har de samme asymptoter som Weisbachs kurve og i overgangsområdet maksimalt afviger ca. 20 % fra denne.

I den videre bearbejdelse er det imidlertid upraktisk at arbejde med kurveskarer, og vi vil derfor i Eytelweins, Janbus og Hileys formler indregne parametrene i de dimensionsløse variable, således at vi kan fremstille hver af disse formler ved en enkelt kurve.

I Eytelweins formel vil vi sætte

$$q_1 = q \sqrt{1 + w}$$

$$s_1 = s \sqrt{1 + w}$$

og får da

$$q_1 = \frac{1}{2 s_1}$$

der er optegnet på fig. 3.

I Janbus formel sættes

$$q_2 = q \sqrt{n_w}$$

$$s_2 = s \sqrt{n_w}$$

hvorved formelen antager formen

$$q_2 = \sqrt{1 + s_2^2} - s_2$$

se fig. 4.

Endelig sættes i Hileys formel

$$q_3 = q \sqrt{\frac{\zeta}{\eta}}$$

$$s_3 = \frac{s}{\sqrt{\eta \zeta}}$$

hvorved igen fås

$$q_3 = \sqrt{1 + s_3^2} - s_3$$

se fig. 5.

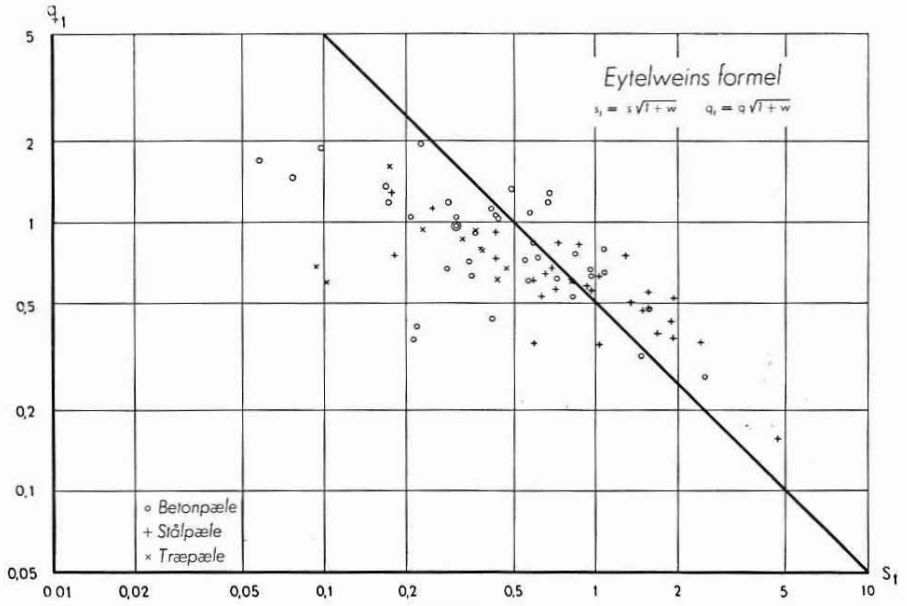


Fig. 3.

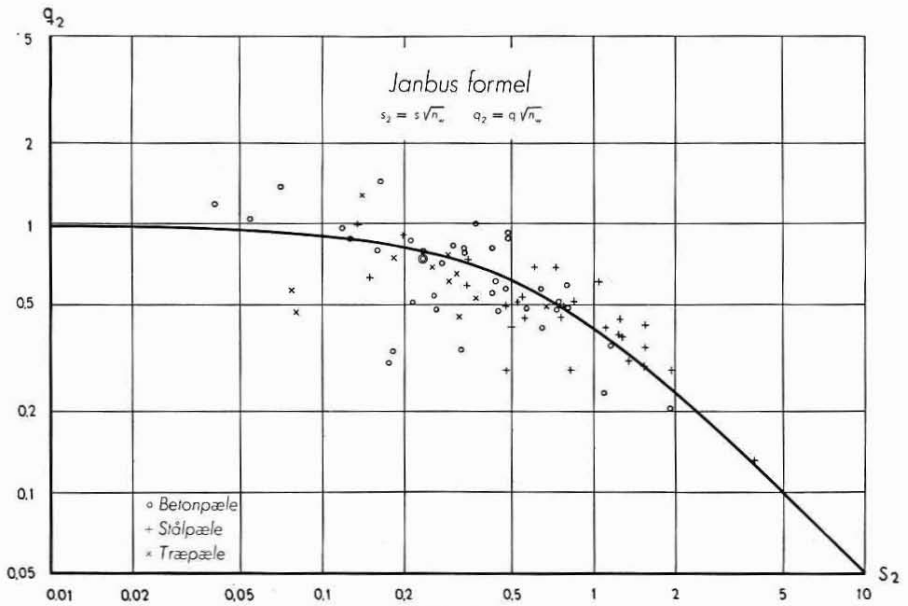


Fig. 4.

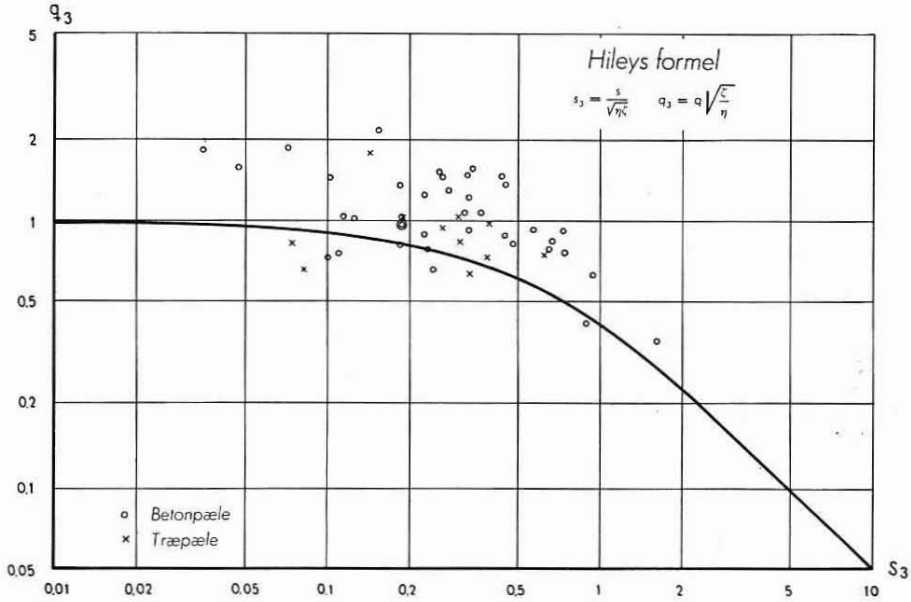


Fig. 5.

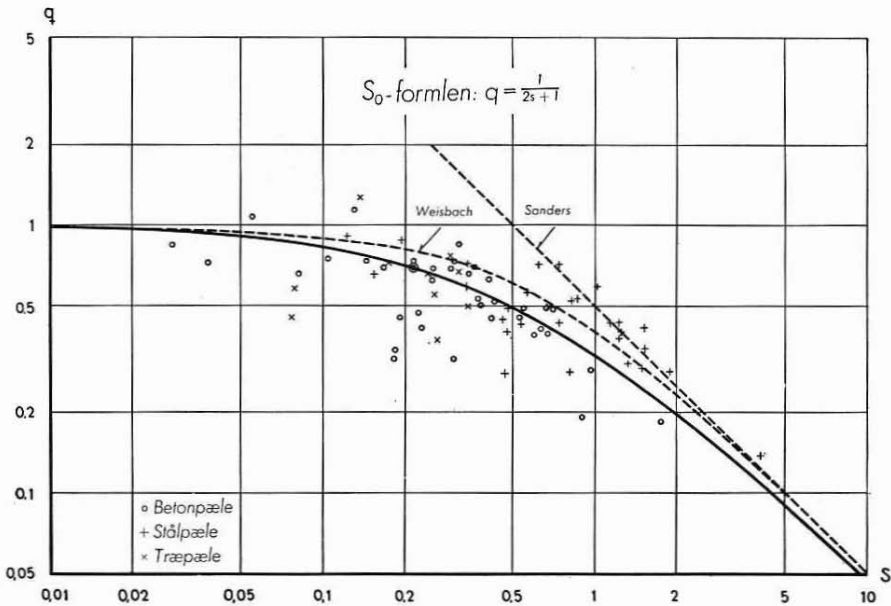


Fig. 6.

S_0 -formlen kan optegnes uden omskrivning, se fig. 6. På denne figur er for fuldstændighedens skyld også indtegnet Sanders' og Weisbachs formler med punkteret linie, men vi vil i bearbejdelsen i øvrigt se bort fra dem, da de ikke her i landet har været genstand for særlig opmærksomhed.

5. Belastningsforsøg.

Det afgørende kriterium ved bedømmelsen af de forskellige rammeformler er naturligvis overensstemmelsen med udførte belastningsforsøg. De betragtede formler vil derfor her blive sammenholdt med resultaterne af 78 belastningsforsøg, hvis data vi har haft adgang til.

Hvert belastningsforsøg er i figurerne 3—6 repræsenteret af et af de indtegnede punkter. Det drejer sig for alle forsøgenes vedkommende om pæle med spidsen i sand eller fast moræneler, og kun sådanne forsøg er medtaget, for hvilke de tilgængelige oplysninger omfatter alle de for en ensartet behandling nødvendige faktorer. Specielt er kun medtaget forsøg, hvor man ud fra en arbejdsurve kan definere pælens brudbelastning som belastningen svarende til en total deformation — elastisk + plastisk — på 10 % af pælens sidelinie.

På to punkter har vi dog fundet det rimeligt at slække på kravet om fuldstændige oplysninger. For det første indeholder forsøg, hvor ramningen er sket med faldhammer, kun sjældent oplysning om, hvorvidt der er rammet med saks, eller spillet har været trukket med. Hvor intet andet har været oplyst, er der regnet med, at klodsen har trukket spillet med under faldet, da dette er det almindeligste. For det andet er medtaget en enkelt forsøgsserie på 11 stålpæle, hvor ramklodsens vægt ikke har været oplyst, men kun energien pr. slag, WH . Ved beregningen af stødtabet i de formler, der tager hensyn til et sådant, er der derfor anvendt en skønnet værdi af ramklodsens vægt; den herved introducerede fejl er antagelig lille i forhold til spredningen på resultaterne i øvrigt, og det er således rimeligt at medtage disse forsøg på grund af den forbedring af materialets statistiske kvalitet, der herved opnås.

Indsamlingen af de benyttede forsøgsresultater er i hovedsagen foretaget af civiling. K. MORTENSEN, samt for en mindre dels vedkommende af civilingeniørerne ANDREAS KNUDSEN og SVEN NIELSEN.

Til figur 5 er i øvrigt at bemærke, at den kun indeholder resultaterne fra 50 forsøg, nemlig forsøgene med træ- eller betonpæle. Hileys formel kræver nemlig for stålpæle kendskab til pæletværsnittets form, idet det A , der indgår i leddene med k og k' , jo ikke er stålarealet, men

snarere arealet af en om pælen omskrevet konveks figur (rektangel eller cirkel). De benyttede resultater omfatter ikke oplysninger om pæleværsnittets form.

Ved bearbejdelsen af forsøgene er regnet med $\alpha = 0,8$, hvis spillet trækkes med af ramklodsen; i modsat fald 1,0.

6. En svingningsteoretisk undersøgelse af ramningsprocessen.

Et principielt mere nøjagtigt billede af ramningsprocessen fås, når pælens elastiske egenskaber indføres på fysisk korrekt måde. Under de i afsnit 2 nævnte forudsætninger betragtes altså nøjere de spændingsbølger, der opstår i pælen under ramningen, idet der dog her af praktiske grunde ses bort fra virkningen af en eventuel ramhat.

I appendix er metoden, der medfører en integration af bølgeligningen under hensyntagen til grænsebetingelserne i pælehovedet og i pælespidsen, beskrevet nærmere. Ved hjælp af den kan man for et givet parametersæt w, n (n' er som nævnt sat $= \infty$ svarende til at ramhatten har højden 0 eller er uendelig stiff) bestemme en teoretisk rammeformelkurve, der således repræsenterer den inden for undersøgelsens rammer mest korrekte tilnærmelse til ligning (14).

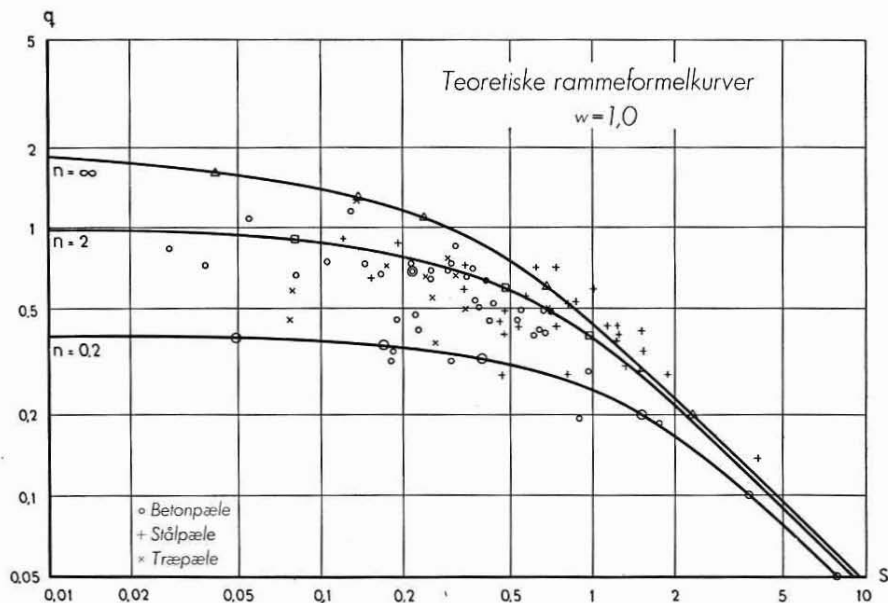


Fig. 7.

På fig. 7 er angivet tre rammeformelkurver, gældende for $w = 1$ og $n = 0, 2, 2$ og ∞ . Da de fundne resultater ikke kan udtrykkes analytisk, og n iøvrigt ikke er kendt for de betragtede belastningsforsøg, kan parametrene n og w ikke inddrages i de dimensionsløse koordinater, således som det er gjort ovenfor ved de betragtede rammeformler. I det almindelige tilfælde er man altså nødsaget til at sammenligne forsøgsresultaterne med en toparametret kurveskare.

Som det fremgår af fig. 7, vil man, dersom det skønnes praktisk, forholdsvis let ved interpolation kunne optegne kurven svarende til et givet parametersæt (w, n) , når blot den vandrette asymptote for $s \rightarrow 0$ er kendt.

q -værdien for asymptoten er optegnet på fig. 8 som funktion af w og n , idet det bemærkes, at de viste kurver for $n \rightarrow \infty$ afløses af meget stejle kurver (ikke vist), der næsten er sammenfaldende med akseren $n = \infty$, og som for $n = \infty$ ender i de yderst til venstre angivne punkter.

Det var nu muligt at sammenligne den fundne kurveskare med belastningsforsøgene, idet n beregnedes ud fra de i litteraturen angivne

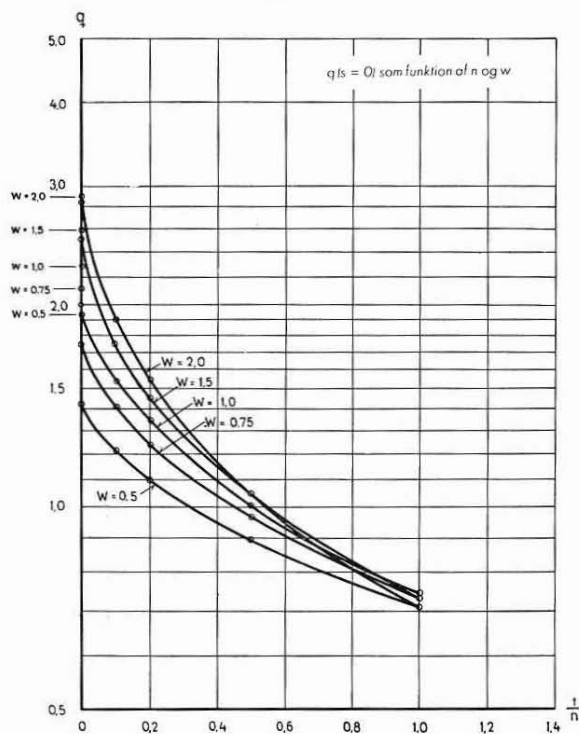


Fig. 8.

k -værdier. Den fejl, man begår ved at sætte k konstant for al jord og alle pæle (jfr. ligning (20)), er imidlertid ukontrollabel, og for enkelheds skyld er det derfor valgt at betragte alle belastningsforsøgene som udført med $w = 1$ og den værdi af n ($= 2$), der får kurven til at ligge omtrent midt i spredningsintervallet. Det bemærkes, at man sandsynligvis ikke herved finder den korrekte middelværdi af n på grund af indflydelsen fra de øvrige, ikke betragtede parametre.

7. *Sammenligning mellem de praktiske formler.*

Det er indlysende, at de gængse rammeformler på mange væsentlige punkter kan gøres til genstand for alvorlig kritik. De vigtigste af disse punkter er følgende.

1. Forudsætningen om, at lydhastigheden i pælematerialet er uendelig og kraften i pælen følgelig den samme i alle pælens tværsnit og lig med rammemodstanden, er langt fra opfyldt (se fig. 13 i appendix). Den opstillede energibetragtning er derfor fundamentalt forkert.
2. Anvendelsen af Newtons stødteori på pæleramning er utilladelig, da den forudsætter fri bevægelighed af de to legemer. Den fører da også til en alt for stærk afhængighed af w .
3. Noget tyder på, at den statiske og den dynamiske bæreevne kan være væsentlig forskellige, men der savnes i øvrigt nærmere kendskab til dette forhold.
4. Alle rammeformlerne negligerer en række forskellige energitab (friktion, dæmpning m. fl.). Beregningen af energitabet fra jordens elastiske deformation i Hileys formel foretages under så radikalt simplificerede forudsætninger, idet der (afsnit 2) ses bort fra afhængigheden af d , D og jordens art, at værdien af korrektionen bliver højst tvivlsom. Ligeledes er energitabet i rammepuden en størrelse, det i de fleste tilfælde er umuligt at beregne.
5. Endelig er pæleramning i det hele taget en proces, der indeholder mange uundgåelige usikkerhedsmomenter, således at beregningen af rammeenergien pr. slag, αWH , er behæftet med stor usikkerhed.

Alle disse forhold medfører, at man ikke på forhånd kan antage, at den bedste rammeformel er den, der tager hensyn til de flest mulige energitab og ser mest »fuldstændig« ud. Det eneste middel, man har

til bedømmelse af de forskellige formler, bliver derfor en statistisk analyse af overensstemmelsen med udførte belastningsforsøg, idet der til sammenligning i undersøgelsen medtages den teoretiske rammeformelkurve for $n = 2$ og $w = 1$.

Overensstemmelsen mellem rammeformel og belastningsforsøg er udtrykt ved forholdet $\mu = \frac{Q_{st}}{Q_{rf}}$, hvor Q_{rf} er den af rammeformlen beregnede bæreevne. Da spredningen imidlertid ikke er lille i forhold til middelværdien af μ , vil fordelingen af μ ikke være en normalfordeling, men en udpræget skæv fordeling. En sådan fordeling er meget ubehagelig at arbejde med og fører let til falske konklusioner. Det indses f. eks. umiddelbart, at middeltallet af μ ikke uden videre kan lægges til grund for en betragtning over, hvor stor sikkerhedsgrad man skal benytte, da et simpelt middeltal normalt ikke falder sammen med den værdi, der svarer til maksimumsordinaten i fordelingsfunktionen. Ved beregning af spredningen σ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\mu - \mu_m)^2}{(n - 1)},$$

hvor n er antallet af resultater og μ_m middelværdien af disse, vil man lægge for stor vægt på de værdier, der er større end μ_m . Endelig er spredningen beregnet på denne måde afhængig af μ_m , idet det umiddelbart ses, at hvis man multiplicerer alle værdier med en konstant c , vil spredningen også blive multipliceret med c . Alle de nævnte forhold kan føre til irrationelle slutninger.

I stedet for at undersøge fordelingen af μ vil det derfor være praktisk at opsøge en funktion af μ , som med rimelighed kan antages at følge Gauss' fejlkurve, hvis rammeformlen ikke indeholder væsentlige systematiske fejl. En sådan funktion har man f. eks. i $\log \mu$; μ_m defineres da ved $\log \mu_m = \frac{\sum \log \mu}{n}$. Hvis $\log \mu$ er normalfordelt, vil der være lige så stor sandsynlighed for værdien $\frac{\mu}{\mu_m} = a$ som værdien $\frac{\mu}{\mu_m} = \frac{1}{a}$, hvilket synes rationelt. Endvidere ses det, at spredningen på $\log \mu$ ikke ændres, selv om alle μ 'erne multipliceres med samme tal, c , hvilket for det første vil sige, at spredningerne for de forskellige formler uden videre kan sammenlignes uden hensyn til, om μ_m afviger mere eller mindre fra 1, og for det andet at spredningen på logaritmen til den virkelige sikkerhedsgrad er lig med spredningen på $\log \mu$.

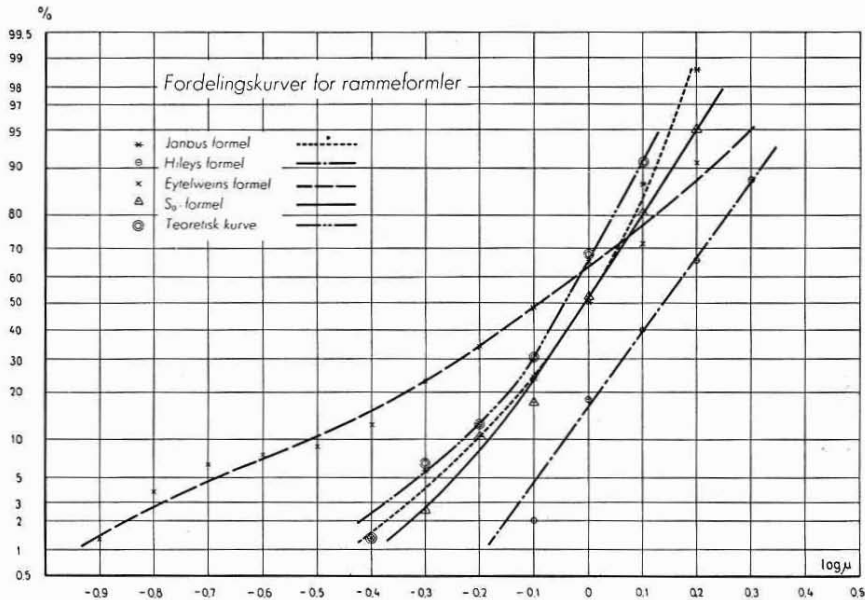


Fig. 9.

Undersøgelsen af fordelingen af $\log \mu$ foretages mest anskueligt ved benyttelsen af sandsynlighedspapir, der er lineært inddelt på abscisseaksen og på ordinataksen inddelt således, at en normalfordeling over abscisseværdierne fremstiller en ret linie. Afsættes på dette papir $\log \mu$ som abscisse og som ordinat det antal belastningsforsøg (i % af det totale antal), for hvilke $\log \mu$ er mindre end abscisseværdien, fås altså en ret linie, hvis fordelingen følger Gauss' fejllov.

Resultatet af en sådan undersøgelse ses på fig. 9. Det ses, at Hiley's formel (50 resultater) har den mest retlinede fordeling, mens Janbus formel, S_0 -formlen og den teoretisk bestemte kurve er praktisk talt lige gode i denne henseende og vel kan siges med tilnærmelse at være retlinede. Fordelingskurven for Eytelweins formel er derimod udpræget krum, hvilket er et resultat af formlens grove systematiske fejl.

Af fig. 9 kan også umiddelbart aflæses middelfejlen, idet denne ganske simpelt er lig med bredden af intervallet mellem værdierne svarende til 16,5 % og 83,5 %, således at den stejleste kurve svarer til den mindste spredning. Middelfejlene på $\log \mu$ er for de undersøgte formler:

Eytelwein ca.	0,57
Hiley	0,27
Janbu	0,25
S_0 -formlen	0,26
Den teoretiske kurve	0,23

S_0 -formlen, Janbu's og Hiley's formel er altså praktisk talt lige gode, mens Eytelweins formel nærmest må karakteriseres som uanvendelig. Det ses, at den teoretiske kurve er lidt bedre end selv den bedste rammeformel.

Det kan ganske vist hertil siges, at antallet af forsøg er lovlig lille ud fra en statistisk betragtning, men det er dog stort nok til, at det må anses for højst usandsynligt, at billedet vil ændres radikalt ved tilvejebringelsen af et større materiale.

Man kan åbenbart af denne undersøgelse konkludere,

- 1) at det er muligt at bestemme pæles bæreevne i sand ved hjælp af en rammeformel med en for praktiske formål tilfredsstillende nøjagtighed.
- 2) at det væsentligste energitab ved ramningen hidrører fra pælens elastiske deformationer (samt naturligvis fra rambukken, hvis ramklodsen trækker wiren med i faldet), og at en formel, der blot gennem en meget simpel og rå tilnærmelse tager hensyn hertil, kan blive lige så nøjagtig (evt. nøjagtigere) end mere komplicerede formler, der forsøger at korrigere også for andre energitab.
- 3) indflydelsen af parameteren w er så ringe, at den drukner i spredningen hidrørende fra faktorer, hvis indflydelse ikke i dag beherskes ved beregning.
- 4) at der ikke vindes noget væsentligt i forøget nøjagtighed ved at indføre pælens elastiske egenskaber på teoretisk korrekt måde. Den fundne middelværdi af $n = 2$ må antagelig betragtes som en ren regnestørrelse, selv om den (se appendix) nok kan forekomme under praktiske forhold.
- 5) at det må anses for ønskeligt, at man her i landet snarest muligt lader Eytelweins formel gå ud af brug og erstatte af en af de tre andre undersøgte rammeformler.

I tilknytning til punkt 5 bør det erindres, at allerede de nugældende normer åbner mulighed for benyttelse af andre rammeformler.

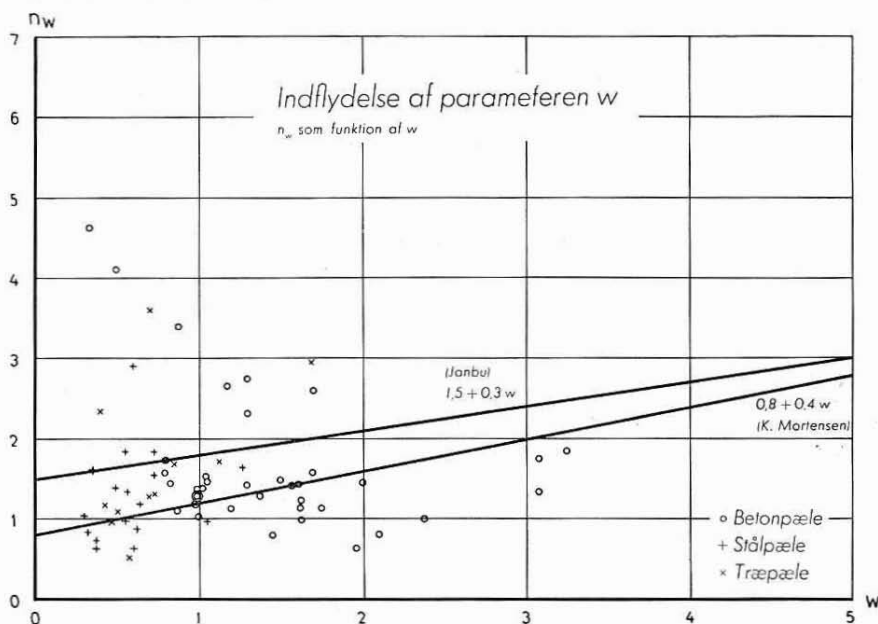


Fig. 10.

Til yderligere belysning af punkt 3 er for Janbus formel for hvert enkelt af de 67 belastningsforsøg, for hvilke w er kendt, udregnet den værdi, man skal tillægge n_w for at få rammeformlen til at stemme med belastningsforsøget. Man finder:

$$n_w = \frac{1}{q^2 + 2qs}$$

Resultaterne er afsat på fig. 10 som funktion af w . Det er tydeligt, at værdien af en korrektion for w er ringe. Kun i det specielle tilfælde, hvor der på et bestemt arbejde rammes med flere forskellige rambukke, kan det være af betydning at indføre en korrektion for w . Denne må i så fald helst bestemmes ved forsøg på stedet i hvert enkelt tilfælde, i det mindste indtil spørgsmålet er nøjere belyst.

Som afslutning på dette afsnit skal det nævnes, at fig. 9 danner et rationelt grundlag for fastsættelsen af en sikkerhedsgrad til anvendelse for de forskellige rammeformler, idet man for en bestemt nominal sikkerhedsgrad n umiddelbart kan aflæse sandsynligheden p for, at den virkelige sikkerhedsgrad bliver mindre end eller lig med 1. Sættes

således $p = 2\%$ findes, at man for de undersøgte formler skal regne med nedenstående nominelle sikkerhedsgrader, n :

Eytelwein	$n = 7,1$
Hiley	$n = 1,4$
Janbu	$n = 2,3$
S_0 -formlen	$n = 2,0$

idet n bestemmes af $\log n = -\log \mu_{2\%}$.

8. Forholdet w .

Det er almindelig kendt, at man ved anvendelsen af rammeformler til bestemmelse af pæles bæreevne må stille visse krav til forholdet mellem vægten af pæl og ramslag. I de gældende danske normer kræves det således, at $w \leq 1$. Det ser imidlertid ud til, at dette krav er begrundet rent empirisk, og da det ofte er vanskeligt at få overholdt i praksis — især for betonpæle — kan det være af interesse at undersøge det nærmere. Fig. 10, der er et direkte udtryk for nøjagtigheden af Janbus formel som funktion af w , synes ikke at tyde på, at nøjagtigheden er dårligere for $w > 1$ end for $w < 1$.

Nu er det en ganske simpel sag at finde en øvre grænse for w på basis af den dimensionsløse fremstilling. Det er en selvfølge, at man f. eks. for S_0 -formlen må kræve, at q er mindre end 1, og for at udelukke de helt små nedsynkninger kan der være grund til at skærpe dette krav til f. eks. $q < 0,9$. Heraf fås:

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{n \cdot \sigma \cdot A}{\sqrt{2 \alpha WHAE}} = \frac{n \cdot \sigma}{\sqrt{2 \gamma_p \alpha HE}} \cdot \sqrt{w} < 0,9$$

eller

$$w < \frac{2 \alpha \gamma_p HE \cdot 0,9^2}{n^2 \sigma^2}, \quad (39)$$

hvor n er sikkerhedsgraden på pælens bæreevne og σ den spænding, hvormed pælen belastes i brugstilstanden. Sættes f. eks. $n = 2,5$ og $\alpha = 0,8$, fås følgende udtryk:

for træpæle $w < 1,02 \cdot H$ (H i m, $\sigma = 400$ t/m², $\gamma_p = 0,8$ t/m³,
 $E = 10^6$ t/m²)

for jernbetonpæle $w < 2,75 \cdot H$ (H i m, $\sigma = 600$ t/m², $\gamma_p = 2,4$ t/m³,
 $E = 2 \cdot 10^6$ t/m²)

for stål pæle $w < 0,34 \cdot H$ (H i m, $\sigma = 10^4$ t/m², $\gamma_p = 7,85$ t/m³,
 $E = 2,1 \cdot 10^7$ t/m²).

Det ses altså, at for en faldhøjde på 1 m svarer denne betingelse for træpæle ganske til det empiriske krav, mens den ved betonpæle er noget mildere og ved stål pæle en hel del strengere.

Hvis man ikke udnytter den tilladelige påvirkning i pælematerialet fuldt ud, ændres grænsen stærkt, da den jo varierer med σ i anden potens. Dette vil dog i almindelighed ikke være aktuelt. Derimod er der grund til at understrege, at den her opstillede betingelse ikke har noget med rammeformlens nøjagtighed at gøre, men alene med det forhold, at man, hvis man overskrider de nævnte grænser, ganske simpelt ikke kan ramme pælen til den ønskede bæreevne. Det vil normalt også være uøkonomisk at gå til grænsen med w , da det vil medføre ramning til meget små nedsynkninger og derfor gøre ramningen unødigt langvarig.

9. Faldhøjden H .

Det er en kendt sag, at man under visse omstændigheder kan komme til at beskadige pælen ved hård ramning. På basis af den svingnings-teoretiske undersøgelse i appendix kan man let udlede et simpelt udtryk, der viser, at det alene er faldhøjden, der er bestemmende for, om der indtræder brud i pælen under ramningen. Der ses dog i dette udtryk bort fra virkningen af en evt. rammepude.

Det forudsættes lige som ved undersøgelsen af w at $q < 0,9$. I så fald optræder den maksimale spænding i pælen i første spændingsbølge. Vi har for den maksimale kraft, P_{max} (jfr. lign. (63) i appendix):

$$\frac{P_{max}}{Q_0} = \sqrt{w}$$

eller

$$P_{max} = \sigma_{max} \cdot A = \sqrt{\frac{W_p}{W}} \sqrt{2 \alpha WH \frac{AE}{L}}$$

$$\sigma_{max} \cdot A = \sqrt{2 \alpha W_p H \frac{AE}{L}}.$$

Da $W_p = \gamma_p \cdot A \cdot L$, fås heraf

$$\sigma_{max} = \sqrt{2 \alpha \gamma_p EH} = E \cdot \frac{v}{a}, \quad (40)$$

hvor v er den hastighed, hvormed ramklodsen rammer pælen.

Vi får altså, at brud i pælen vil indtræffe under ramningen, hvis faldhøjden overstiger:

$$H_B = \frac{\sigma_B^2}{2 \alpha \gamma_p E}. \quad (41)$$

For de sædvanligt anvendte pælematerialer fås:

Træ	$H_B = 4,9 \text{ m}$	$(\sigma_B = 2,5 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2)$
Jernbeton	$H_B = 1,2 \text{ m}$	$(\sigma_B = 3,0 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2)$
Stål	$H_B = 2,6 \text{ m}$	$(\sigma_B = 2,6 \cdot 10^4 \text{ t/m}^2)$

Rammes der med for stor faldhøjde, vil bruddet fortrinsvis ske i pælehovedet.

Hvis pælen rammes hårdere end til den til $q = 0,9$ svarende ned-synkning, kan spændingerne vokse betydeligt over den til (40) svarende værdi, således at risikoen for beskadigelse forøges stærkt. Det vil her navnlig være pælespidsen, der er udsat for brud.

10. Rammesondering.

Af den foretagne undersøgelse fremgår det, at bæreevnen for en pæl kan forudsiges med rimelig sikkerhed ud fra rammeresultaterne. Suppleres undersøgelsen yderligere med belastningsforsøg, kan man forøge rammeformlens nøjagtighed væsentligt, f. eks. ved i S_0 -formlen at indføre en eksperimentelt bestemt η -værdi.

Det er imidlertid klart, at man meget ofte vil være interesseret i, endnu inden ramningen begynder, at kunne vurdere jordens egenskaber, således at f. eks. de nødvendige pælelængder kan forudsiges med rimelig nøjagtighed. Det er nærliggende at undersøge muligheden for at opnå disse oplysninger ved en rammesondering. Man tænker sig altså udført et indledende ramningsforsøg med passende let grej,

således at forsøget kan udføres inden for et rimeligt tidsrum og uden for store omkostninger. Ved bearbejdelsen af rammeresultaterne og eventuelt et tilhørende belastningsforsøg skulle man således opnå de ønskede forhåndsoplysninger om jordens egenskaber.

Principielt kan rammesonderingen naturligvis udføres ved, at man uden særlige overvejelser rammer en stålstang ned gennem jorden og indsætter de fundne resultater i en rammeformel. Man får da bestemt en bæreevnefaktor N (jfr. ligning (15)) og kan også ud fra f. eks. de teoretiske rammeformelkurver omregne resultaterne til brug for de virkelige pæle, hvor sandsynligvis både q , w , n og n' antager andre værdier. Det er imidlertid indlysende, at man bør tilstræbe at udføre rammesonderingen ved de samme værdier af de fire betragtede parametre som i de virkelige pæle. Dels sparer man så den besværlige og i bedste fald usikre omregning, og dels har man grund til at formode, at også andre parametre (som f. eks. forholdet mellem statisk og dynamisk bæreevne) bliver identiske.

Som eksempel betragtes en 25×25 cm jernbetonpæl af 10 m længde. Den antages at skulle rammes med en ramklods med $W = 1500$ kg og $H = 1$ m. Man har altså:

$$\begin{aligned} A &= 625 \text{ cm}^2 \\ L &= 10 \text{ m} \\ W_p &= 1500 \text{ kg} \\ W &= 1500 \text{ kg} \\ H &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Idet α sættes til 0,8 findes:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{2 \cdot 0,8 \cdot 1500 \cdot 100 \frac{1000}{625 \cdot 2 \cdot 10^5}} = 1,39 \text{ cm} \\ Q_0 &= 1,39 \frac{625 \cdot 2 \cdot 10^5}{1000} = 173.000 \text{ kg} \\ T_0 &= \frac{1000}{\sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 981}{2,4 \cdot 10^{-3}}}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ sec.} \end{aligned}$$

Udnyttes pælen fuldt ud, fås, idet den tilladelige betonspænding sættes til 60 kg/cm^2 og sikkerheden på pælens bæreevne til 2,5:

$$Q = 2,5 \cdot 60 \cdot 625 = 93.750 \text{ kg.}$$

Er jordens rumvægt $\gamma = 1,7 \text{ t/m}^3$, svarer hertil en N -værdi på ca. 90, hvilket synes sandsynligt. Pælen vil således kunne udnyttes som forudsat. Man har altså:

$$\begin{aligned} q &= 0,54 \\ w &= 1 \end{aligned}$$

Størrelsen n kan vanskeligt vurderes, da der kun findes et meget begrænset antal målinger. Antages det imidlertid, at formel (21) gælder, kan eventuelle foreliggende modelforsøg på samme sandsort udnyttes. ANDREAS KNUDSEN og SVEN NIELSEN [5] fandt en k -værdi på 880 kg/cm^3 for en modelpæl af 2,69 cm diameter nedrammet i ca. 25 cm dybde. For sand af samme egenskaber fås derfor for den betragtede pæl ifølge (21):

$$k_{pæl} = 880 \left(\frac{10}{0,25} \right)^{1/3} \frac{2,4}{25} = 290 \text{ kg/cm}^3$$

$$n = 290 \frac{1000}{2 \cdot 10^5} = 1,45.$$

Som angivet i afsnit 3 er der i litteraturen opgivet en k -værdi på 280 kg/cm^3 , hvortil svarer en n -værdi på 1,4. Erfaringsresultaterne for k stammer åbenbart fra pæle af den her betragtede størrelsesorden.

Tænkes ramhatten udført af træ i 10 cm højde, findes n' , idet:

$$n' = \frac{10^5}{10} \frac{1000}{2 \cdot 10^5} = 50.$$

Det ses, at n' er meget større end n , og desuden så stor, at man med rimelig tilnærmelse kan antage, at den er uendelig (d. v. s. se bort fra den).

Idet rammesonden har samme længde og nedrammet dybde som pælen, ses det af (21), at dens diameter skal variere omvendt proportionalt med elasticitetsmodulen, når der tilstræbes samme værdi af n .

Udføres sonden i stål, fås altså en sidelinie på ca. 2,5 cm eller, for en cirkulær stang, en diameter på 2,8 cm. Af praktiske grunde vil man sikkert slække på kravet om absolut overensstemmelse for n og i stedet anvende en stang med f. eks. 4 cm diameter. Man får da $n = 1,0$ i stedet for 1,45, hvilket næppe er afgørende.

Af (16) ses det nu, at WH skal være ca. 500 gange mindre for ramme-sonden end for pælen; med $w = 1$ fås da $W = 100$ kg og $H = 3$ cm. Mens det må anses for et uomgængeligt krav, at q skal være meget nær den samme for de to pæle, kan man her øjensynligt slække noget på kravene for w . En praktisk mere gennemførlig kombination synes at være $W = 25$ kg og $H = 12$ cm, hvorved q bliver uændret, mens w vokser til 4. Ønsker man at bibeholde en n' -værdi på 50, skal ramme-hatten nu være 1 cm høj.

Med det skitserede arrangement fås således i det væsentlige samme forhold under sonderingen som under den planlagte ramning, og resultaterne kan altså med rimelig sikkerhed anvendes på de planlagte pæle. Den maksimale bæreevne for sonden svarende til fuld udnyttelse af pælen er på knapt 2 t, således at det vil være overkommeligt at supplere de indledende undersøgelser med et belastningsforsøg. Et eller flere sådanne belastningsforsøg vil formentlig kunne eliminere en stor del af den spredning, der ovenfor er fundet på de enkelte ramme-formler, og således motivere en nedsættelse af den nødvendige sikkerhed på pælens bæreevne.

LITTERATURFORTEGNELSE

- [1] R. V. ALLIN: The Resistance of Piles to Penetration. London 1951.
- [2] R. D. CHELLIS: Pile Foundations. New York 1951.
- [3] N. JOHANSEN (JANBU): Beregning av frittstående pelters bruddlast og tillatte belastning. Teknisk Ukeblad, 26, 1951.
- [4] K. MORTENSEN: Pæles bæreevne. Undersøgelse udført for udvalget til revision af funderingsnormerne. 1953 (ikke publ.).
- [5] A. KNUDSEN og Sv. NIELSEN: Pæle i sand. Eksamensprojekt i fundering 1955/56.
- [6] A. E. CUMMINGS: Dynamic Pile Driving Formulas. Journ. Boston Soc. Civil Engineers, Vol. 27, 1940.
- [7] W. H. GLANVILLE, G. GRIME, E. N. FOX and W. W. DAVIES: An Investigation of the Stresses in Reinforced Concrete Piles During Driving. Dept. Sci. Ind. Research, Building Research Station, Technical Paper 20, 1938.

APPENDIX

En svingningsteoretisk undersøgelse af ramningsprocessen.

Ved en nærmere undersøgelse af de spændingsbølger, der optræder i pælen under ramningen, må bølgeligningen (med tilhørende grænsebetingelser) for longitudinalsvingninger i pælen betragtes. Den udledes, idet der betragtes ligevægten for et legeme i pælen, begrænset af to konsekutive pæletværsnit (jfr. fig. 11).

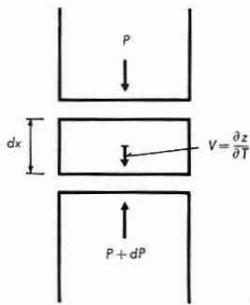


Fig. 11.

Trykkraften P på et vilkårligt tværsnit i pælen er givet ved:

$$P = \sigma A = -AE \frac{\partial Z}{\partial X}.$$

Den totale nedadrettede kraft på det betragtede legeme (af højden dX) er:

$$K_e = -dP = -\frac{\partial P}{\partial X} dX = AE \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dX. \quad (42)$$

Legemet har massen $\rho A dX$, og inertikraften på legemet (positiv opadrettet) er derfor:

$$K_i = \rho A \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} dX. \quad (43)$$

Ligevægtsbetingelsen kræver, at $K_e = K_i$ til ethvert tidspunkt, altså, idet $\alpha = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}. \quad (44)$$

Idet der indføres de i afsnit 2 fundne dimensionsløse variable, omformes ligningen til:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (45)$$

Denne ligning (bølgeligningen) har som generel løsning:

$$z = f(t - x) + F(t + x), \quad (46)$$

hvor f og F er arbitrære funktioner i een variabel, afhængige af de givne grænsebetingelser. Som det ses, repræsenterer de to bølger, der med hastigheden a bevæger sig hver sin vej i pælen.

Den første f -bølge f_1 udløses til tiden $t = 0$ i pælehovedet og når ned til pælespidsen ($x = 1$), når $t = 1$. Ved refleksion fra pælespidsen opstår nu en F -bølge F_1 , der når op til pæletoppen, når $t = 2$. Idet den reflekteres, dannes en ny f -bølge f_2 o. s. v. f_1 har argumentværdier mellem 0 og 2 og F_1 mellem 2 og 4. Er f - og F -funktionen kendt, kan et vilkårligt pæletværsnits bevægelser findes af (46). Hastighederne og trykkrafterne i pæletværsnittene findes af:

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = f'(t - x) + F'(t + x) \quad (47)$$

$$p = -\frac{\partial z}{\partial x} = f'(t - x) - F'(t + x), \quad (48)$$

hvor ' angiver differentiation med hensyn til funktionernes argument.

De analytiske udtryk for f og F bestemmes af grænsebetingelserne i pæletoppen og i pælespidsen.

Den kraft, pæletoppen påvirker ramklodsen med (positiv som trykkraft), kan skrives:

$$-AE \frac{\partial Z}{\partial X}.$$

Såfremt accelerationen af pæletoppen (positiv nedadrettet) er mindre end tyngdeaccelerationen g , vil der være kontakt, og Newtons 2. lov kan opstilles for ramklodsen:

$$-AE \frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{W}{g} \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}. \quad (49)$$

Gøres denne ligning dimensionsløs, fås:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{W}{W_p} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (50)$$

Omskrevet i funktionerne f og F fås, idet det erindres, at det søgte udtryk er en differentiaalligning for f (F må ifølge det foregående forudsættes bekendt)

$$f'' + wf' = -F'' + wF'; \quad (51)$$

f og F skal her have samme argument ($t - x = t + x$).

Ved overgangen fra en f -funktion til en anden (f. eks. idet den første F -bølge når op til pælehovedet) gælder en begyndelsesbetingelse, der udtrykker, at z og $\frac{\partial z}{\partial t}$ er kontinuerte funktioner, altså:

$$f_2 + F_2 = f_1 + F_1$$

og

$$f'_2 + F'_2 = f'_1 + F'_1 \quad (52)$$

gældende i overgangspunktet.

Er pæletoppens acceleration større end g , vil pæletoppen åbenbart forlade ramklodsen og vil derefter være fri. Herefter gælder blot, at kraften på pæletoppen er nul, altså $\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$, eller:

$$f' = F'. \quad (53)$$

Her behøver kun z at være kontinuert, således at kun den øverste af overgangsbetingelserne (52) gælder.

Grænsebetingelsen ved pælespidsen vil afhænge af, om jorden er i elastisk eller plastisk tilstand. I førstnævnte tilfælde fås (for $x = 1$):

$$-AE \frac{\partial Z}{\partial X} = kA(Z - Z_0). \quad (54)$$

Z_0 er her endepunktet for den aktuelle aflastningskurve $\left(= Z - \frac{P}{kA} \right)$ jfr. arbejdskurven fig. 2. Gøres denne ligning dimensionsløs fås:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -n(z - z_0). \quad (55)$$

Omskrevet til en differentiaalligning for F (idet f nu må betragtes som bekendt) lyder (55):

$$F' + nF = f' - nf + nz_0. \quad (56)$$

F har her et argument, der er 2 større end f 's ($t + x = t - x + 2$). Er jorden i plastisk tilstand, fås:

$$-AE \frac{\partial Z}{\partial X} = Q, \quad (57)$$

der let omskrives til:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -q \quad (58)$$

eller:

$$F' = f' - q. \quad (59)$$

I begge tilfælde gælder den øverste af overgangsbetingelserne (52).

Når første f -bølge når ned til pælespidsen, vil jorden åbenbart være i elastisk tilstand endnu, hvorfor (56) i begyndelsen skal anvendes. Overgangen til plastisk tilstand, og dermed til ligning (59), sker, når $-\frac{\partial z}{\partial x} = f' - F'$ bliver lig q . På et senere tidspunkt, når pælens nedpresning er ved at være standset, vil jorden atter gå over i elastisk tilstand; dette vil ske, når $\frac{\partial z}{\partial t} = f' + F'$ bliver nul (og derefter negativ). Her er åbenbart:

$$z_0 = z + \frac{1}{n} \frac{\partial z}{\partial x} = z - \frac{q}{n} \quad (60)$$

da (58) gælder i overgangspunktet.

Herefter er de nødvendige ligninger til løsning af den stillede opgave tilvejebragt. Til bestemmelsen af den første f -bølge gælder (51), med $F = 0$. Som begyndelsesbetingelser fås:

$$Z = 0$$

og

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = v = \sqrt{2 \alpha g H}.$$

Opskrevet dimensionsløst:

$$f = 0$$

og

$$f' = \sqrt{w}. \quad (61)$$

Der findes let:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{w}} (1 - e^{-w(t-x)}) \quad (62)$$

gældende for $0 \leq t - x \leq 2$. Af (48) findes:

$$p = \sqrt{w} e^{-w(t-x)}. \quad (63)$$

Man har altså $p_{max} = \sqrt{w}$ gældende for fronten af spændingsbølgen.

Det analytiske udtryk for f - og F -funktionen bliver efter få trin meget kompliceret, bl. a. fordi man må operere med to forskellige differentiaalligninger både i pæletoppen og i pælespidsen. Man er derfor, bortset fra de første trin, henvist til at anvende en numerisk integration, der f. eks. kan udføres som nedenfor beskrevet.

Alle de betragtede differentiaalligninger har formen:

$$y'' = Ay' + B \quad (64)$$

eller

$$y' = Cy + D, \quad (65)$$

hvor A , B , C og D er kendte funktioner af y 's argument x . Betragtes to punkter svarende til x_1 og $x_2 = x_1 + \Delta x$, kan vi ved (64) forudsætte, at y , y' og y'' er kendt for $x = x_1$. Med en simpel tilnærmelse kan man nu skrive:

$$y_2' = y_1' + \frac{1}{2} \Delta x (y_1'' + y_2'') = y_1' + \frac{1}{2} \Delta x (y_1'' + A_2 y_2' + B_2).$$

I A og B skal åbenbart indsættes $x = x_2$. Løses denne ligning med hensyn til y_2' fås:

$$y_2' = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta x A_2} \left(y_1' + \frac{1}{2} \Delta x (y_1'' + B_2) \right). \quad (66)$$

y_2'' findes ud af (64) og y_2 af:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} \Delta x (y_1' + y_2'). \quad (67)$$

Ved (65) fås tilsvarende:

$$y_2 = \frac{1}{1 \div \frac{1}{2} \Delta x C_2} \left(y_1 + \frac{1}{2} \Delta x (y_1' + D_2) \right) \tag{68}$$

og y_2' findes af (65). De numeriske beregninger til nærværende artikel er udført med $\Delta x = 0,2$.

Foruden de oplysninger om f. eks. spændingsforholdene i pælen under ramningen, der kan udledes af den fundne løsning, findes direkte den værdi af s , der svarer til det anvendte sæt parametre, som z_0 , når jorden for sidste gang kommer i elastisk tilstand. For hver integration svarende til et sæt parametre findes altså et punkt på den teoretiske rammeformelkurve (jfr. fig. 7).

Som eksempel på de yderligere oplysninger man ved denne beregning får af rammeprocessens forløb, er på fig. 12 og 13 for et tilfælde af »easy driving« optegnet dels pæletværsnittenes bevægelser, dels de optrædende trykkræfter i pælen som funktioner af t . Det bemærkes, at pælens tyngdepunkt stort set bevæger sig efter en parabelformet kurve, samt at denne bevægelse er overlejret af længdesvingninger i

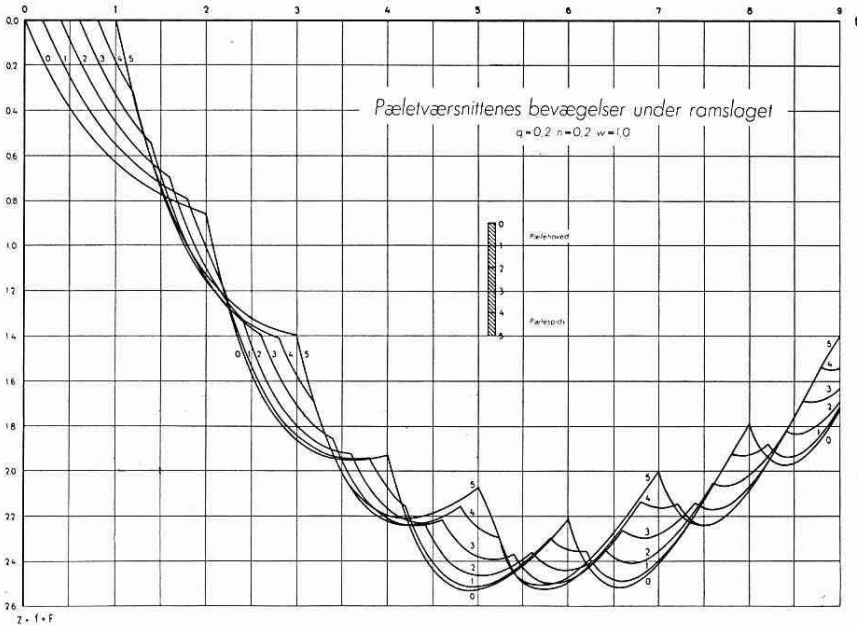


Fig. 12.

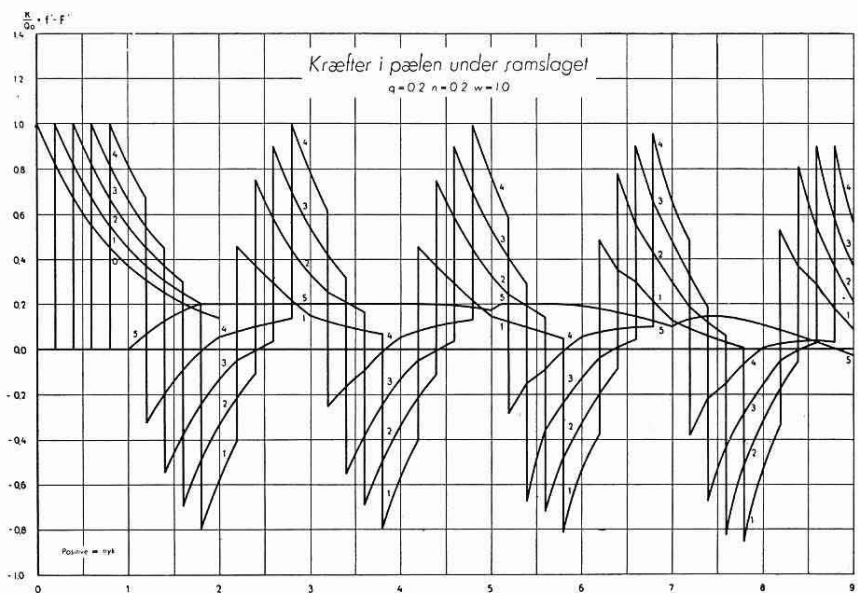


Fig. 13.

pælen. Til tiden $t = 2$ forlader pælehovedet ramklodsens, som derefter falder frit omtrent efter tangenten til kurven 0 på fig. 12 (det erindres, at tyngdeaccelerationen g i den anvendte tids- og længdemålestok er $\frac{gT_0^2}{S_0}$, hvilket kan omskrives til $\frac{W_p}{Q_0}$, altså i reglen en meget lille størrelse). Efterslaget vil i dette tilfælde komme til tiden $t = \text{ca. } 8$, hvor pælens plastiske nedsynkning er tilendebragt; det vil kun tilføre pælen en ekstra slagenergi på ca. 2 % af den oprindelige, hvorfor der helt er set bort fra efterslaget.

Spændingsbølgerne på fig. 13 er karakteristiske ved deres meget stejle fronter og ved pludselige spring fra tryk til træk. Kurven 5 viser, at pælspidsen til tiden $t = \text{ca. } 9$ slipper kontakten med jorden. Taget sammen giver de to figurer sikkert et kvalitativt rigtigt billede af ramningsprocessen, men det må forventes, at man eksperimentelt ville finde noget modificerede kurveforløb. Bl. a. på grund af dæmpningen og friktionen langs pælens sider vil kurverne svarende til fig. 13 utvivlsomt i naturen have væsentlig mere afrundede former og desuden amplituder, som aftager ret kraftigt med tiden. I betonpæle vil man formentlig heller ikke kunne få så store trækspændinger som angivet på fig. 13.

ENGLISH SUMMARY

Based on simple dimensional considerations the set per blow and the bearing capacity of the pile are expressed in dimensionless form in terms of the energy of the blow and the elastic properties of the pile. The pile driving formulas of SANDERS, WEISBACH, EYTELWEIN (Dutch formula), JANBU and HILEY are then reduced to very simple dimensionless equations, the three latter involving one or (for HILEY) two dimensionless parameters representing the impact loss and the energy losses due to elastic deformation of the soil and the pile cap and head.

The formulas are represented graphically in the dimensionless form and compared with the results of 78 load tests compiled from the literature. Only piles in sand are considered, and only such tests where it is possible to apply a uniform definition of the bearing capacity. If Q_{st} and Q_{dyn} designate the bearing capacities according to load test and pile driving formula, respectively, a statistical analysis shows that $\log Q_{st}/Q_{dyn}$ follows approximately a Gaussian distribution with a standard deviation of about 0,26 provided the formula considered takes due regard to the elastic deformation of the pile. The attempts of JANBU and HILEY to correct for the impact loss and the elastic deformation of the soil and the pile cap do not seem justified by any increased accuracy.

A new formula (named "The S_0 -Formula") with the same accuracy as the best of the existing formulas, but much simpler than these, is proposed. In fact, the new formula is a dimensionally correct form of the Engineering News' formula.

The formulas are also compared with the results of a numerical integration of the differential equation governing the stresses and deformations in the pile during the blow. The differential equation has been solved for a few different values of the parameters mentioned above. The results are consistent with the preceding conclusions.

Simple expressions for the necessary weight of the hammer and the maximum allowable height of fall—disregarding the effect of a driving cushion—are deduced.

Finally the conditions under which the necessary length of piles may be predetermined by dynamic penetration tests are discussed. Although a certain scale effect is present the method is expected to yield good results, but no experimental evidence is available at the moment.

In an appendix the details of the integration of the differential equation (wave equation) for the pile during driving are described.